Т.1 (необходимое усл-е интегр-ти). Если $f \in R[a,b]$, то f ограничена на $[a,b]$.

Д-во: Предположим, что f не огранич. на $[a,b]$. Пусть $T=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ – разб-е $[a,b]$. Тогда $\exists\, [x_{r-1}, x_r]$ – отрезок, на к-ром f не ограничена. Выберем произвольные $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k=1,\dots,n$, $k \neq r$.

Обозначим $A = \left| \sum\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq r}}^{n} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k \right|$.

Возьмем любое $M>0$. f не ограничена на $[x_{r-1}, x_r]$
$\Rightarrow \exists\, \xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$, т.ч. $|f(\xi_r)| > \dfrac{M+A}{\Delta x_r}$.

Получим $V=\{x_0, x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n\}$ – размеч. разбиение, причем

$$|\sigma(V)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k\right| = \left|\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq r}}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k + f(\xi_r)\cdot\Delta x_r\right| \geq$$

$$\underset{\uparrow}{\geq} |f(\xi_r)\cdot\Delta x_r| - A > \frac{M+A}{\cancel{\Delta x_r}}\cdot\cancel{\Delta x_r} - A = M.$$

$|a+b| \geq |b|-|a|$

То есть $\forall M>0\ \forall\delta>0\ \exists V,\ \Delta_V<\delta: |\sigma(V)|>M$
$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{\Delta_V\to 0} \sigma(V)$. ч.т.д.

Т.1 (критерий Римана интегр-ти функции).
Пусть f определена и ограничена на $[a,b]$.
$f\in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists T$ – разбиение $[a,b]$:

$$0 \leq S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

Д-во: ($\Rightarrow$) Пусть $f\in R[a,b]$. $\exists I = \int_a^b f(x)\,dx$.
Возьмем $\varepsilon>0$. $\exists\delta(\varepsilon)$, т.ч. $\forall V$, $\Delta_V<\delta$:
$|\sigma(V) - I| < \varepsilon/3$. Т.к. $S(T) = \sup\{\sigma(V)\}$,
$s(T) = \inf\{\sigma(V)\}$ (л. 2), то из нер-ва $I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(V) < I + \frac{\varepsilon}{3}$
следует: $I - \frac{\varepsilon}{3} \leq S(T) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$, $I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s(T) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow 0 \leq S(T) - s(T) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Заметим, что $\forall\varepsilon>0$ $\exists T$-разб-е: $0 \underset{\text{л. 5}}{\leq} I^* - I_* \leq S(T) - s(T) <$
$I^* \leq S(T)$
$I_* \geq s(T)$
$< \varepsilon$ по усл-ю, но I^* и I_* не зависят от $\varepsilon \Rightarrow I^* = I_*$.
Из л. 6 $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta_T\to 0} S(T) = I^* = I_* = \lim\limits_{\Delta_T\to 0} s(T)$, т.е.
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)$, т.ч. $\forall T$, $\Delta_T<\delta$: $0\leq S(T) - s(T) < \varepsilon$.
Тогда $\forall V$ – размеч. разб-я, $\Delta_V<\delta$: $\underbrace{s(T) \leq \sigma(V) \leq S(T)}_{\text{лемма 1}}$,
$s(T) \leq I \leq S(T)$, где $I := I^* = I_*$, значит,
$|I - \sigma(V)| \leq S(T) - s(T) < \varepsilon \Rightarrow f\in R[a,b]$. ч.т.д.

Следствие. Пусть f ограничена на $[a,b]$. $f\in R[a,b] \Leftrightarrow I^* = I_*$.